

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Понятие случайной величины

Мы переходим к изучению еще одного важного понятия теории вероятностей, к понятию “случайная величина”.

Чтобы лучше понять это, приведем несколько примеров.

в умл.ду Юы енр яШлом мра

1. Число мальчиков, родившихся в течение суток в определенном городе.

2. Значение температуры при неоднократном измерении.

3. Число выпавших “гербов” при пятикратном бросании монеты.

4. При однократном бросании кости количество выпавших очков также является случайной величиной.

В примерах мы можем заметить, что одни случайные величины принимают отдельные изолированные значения, которые мы можем занумеровать или перечислить (1,3,4).

Другие величины, например температура, принимают несчетные значения (значения, которые нельзя пересчитать), т.е. эти значения заполняют некоторый интервал.

Случайной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное возможное значение, неизвестное заранее, но обязательно одно, т.е. величина, значение которой меняется от опыта к опыту случайным образом, называется случайной.

Случайные величины принято обозначать большими латинскими буквами X , Y , а принимаемые ими значения – малыми латинскими буквами x , y .

Различают случайные величины следующих типов: дискретные и непрерывные.

Дискретной случайной величиной называют такую случайную величину, множество возможных значений которой либо конечное, либо бесконечное, но счетное.

Непрерывной случайной величиной называют такую случайную величину, которая может принять любое значение из некоторого конечного или бесконечного интервала.

Операции над случайными величинами

Введем теперь операции над случайными величинами. Пусть имеются две случайные величины X и Y , возможными значениями которых являются $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ соответственно.

Суммой $X + Y$ случайных величин X и Y называется случайная величина Z , возможное значение которой есть $x_1 + y_1; x_1 + y_2; \dots; x_i + y_j; \dots; x_n + y_n$.

Произведением $X \times Y$ случайных величин X и Y называется случайная величина Z , возможное значение которой есть: $x_1 y_1; x_1 y_2; x_1 y_3; \dots; x_i y_j; \dots; x_n y_m$.

Произведением $C \times X$ случайных величин X на постоянную C называется такая случайная величина Z , возможные значения которой есть: $Cx_1, Cx_2, \dots, Cx_i, \dots, Cx_n$.

в ум.пуС

При бросании двух кубиков значения случайной величины Z - «сумма выпавших очков» - находим по формуле $Z = X + Y$.
 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$Z = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Значения случайной величины Z находятся в неодинаковых условиях. Действительно, значение 2 может получиться из пары (1,1), а значение 8 из пяти пар: (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2). Это значит, что 2 и 8 имеют неодинаковую вероятность появления.

$$P(Z=2) = \frac{1}{36}, \quad \text{а } P(Z=8) = \frac{5}{36}.$$

Появление тех или иных значений случайной величины можно рассматривать как события, а событиям, как нам известно, соответствуют вероятности. Поэтому возможные значения

случайных величин отличаются между собой с вероятностной точки зрения.

Таким образом, перечисление всех возможных значений случайной величины не дает достаточно полного представления о ней. Необходимо знать, как часто могут появляться те или иные значения в результате испытаний, проводящихся в одинаковых условиях, т.е. следует знать вероятности их появления.

Связь между случайной величиной и соответствующей вероятностью называют законом распределения.

Законом распределения случайной величины называется любое правило, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Закон распределения может быть представлен в табличном, аналитическом или графическом виде.

Дискретные случайные величины

Для начала рассмотрим дискретную случайную величину.

Пусть случайная величина X имеет n возможных значений $x_1, \dots, x_n$, каждое из этих значений возможно, но не достоверно, и случайная величина X может принять каждое из них с некоторой вероятностью. В результате опыта величина X примет одно из этих значений, т.е. произойдет одно из полной группы несовместимых событий:

$$X = x_1$$

$$X = x_2$$

...

$$X = x_n$$

Обозначим вероятности этих событий: $p_1, p_2, \dots, p_n$ соответственно, т.е.

$$P(X = x_1) = p_1$$

$$P(X = x_2) = p_2$$

...

$$P(X = x_n) = p_n.$$

Так как события несовместимые и образуют полную группу, то

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1,$$

т.е. сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна 1. Эта суммарная вероятность распределена каким-то образом между отдельными значениями.

Случайная величина будет полностью описана с вероятностной точки зрения, если мы зададим это распределение, т.е. в точности укажем, какой вероятностью обладает каждое из событий, этим мы установим так называемый закон распределения случайных величин.

Ряд распределения дискретной случайной величины

Установим форму, в которой может быть задан закон распределения дискретной случайной величины X .

Простейшей формой задания этого закона является таблица, в которой перечислены возможные значения случайных величин (упорядоченные по возрастающей) и соответствующие им вероятности, где $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Такая таблица называется рядом распределения случайных величин X или вариационным рядом.

Чтобы придать ряду распределения более наглядный вид, часто используют его графическое изображение: по оси абсцисс (OX) откладываются возможные значения случайных величин, а по оси ординат (OY) – вероятности этих значений. Для наглядности полученные точки соединяют отрезками прямых.

Такая фигура называется *многоугольником* распределения или *полигоном*.

Многоугольник распределения так же, как и ряд распределения, полностью характеризует случайную величину; он является одной из формул закона распределения.

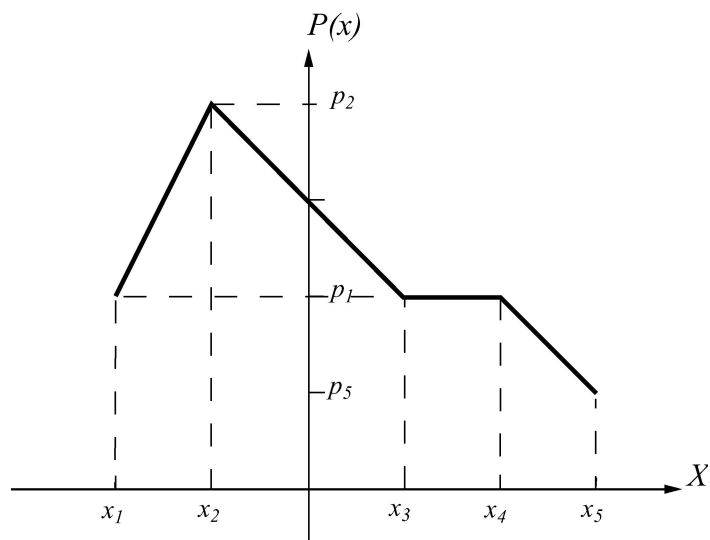


Рис. 6. Полигон распределения

в ум.л.у.С

Рассмотрим случайную величину Z (сумму выпавших очков при бросании 2-х кубиков), принимающую следующие значения:

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}
Z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Это вариационный ряд. Просуммируем полученные вероятности.

$$\sum_{i=1}^{11} p_i = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \dots + \frac{1}{36} = 1.$$

Построим полигон.

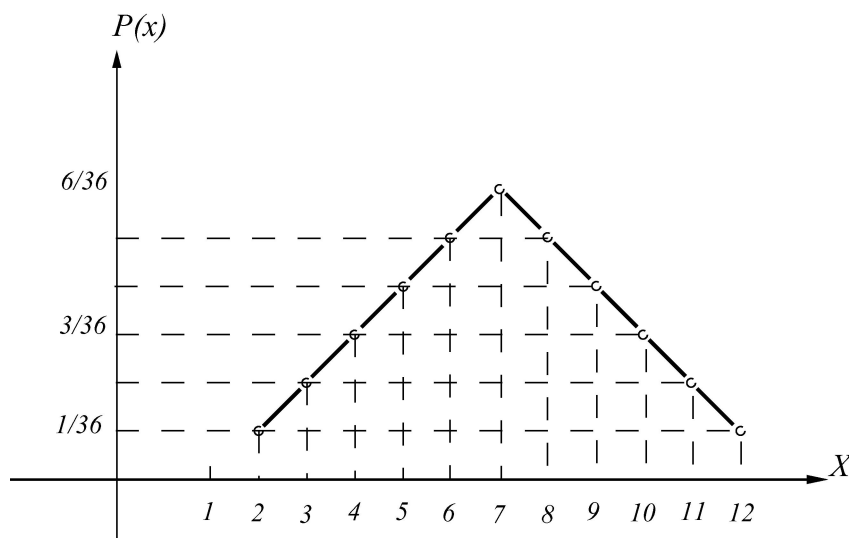


Рис. 7. Полигон распределения к примеру

Как уже говорилось, закон распределения полностью характеризует случайную величину. Выше были рассмотрены табличный и графический способы представления.

Функция распределения случайной величины

Однако непрерывную случайную величину сложно представить с помощью ряда, для этого нужно более универсальное средство. Рассмотрим *аналитический* способ задания.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, задающая вероятность того, что случайная величина X принимает значения меньше x , т.е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция распределения является одной из форм закона распределения. Она — самая универсальная характеристика

случайной величины и существует для всех случайных величин как дискретных, так и непрерывных.

Сформулируем некоторые общие свойства функции распределения.

дискретная

1. Функция $F(x)$ есть неубывающая функция своего аргумента, т.е. $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 > x_1$.
2. На минус бесконечности функция $F(x) = 0$,
 $F(-\infty) = 0$.
3. На плюс бесконечности функция $F(x) = 1$,
 $F(+\infty) = 1$.

Последние два свойства вытекают из определения $F(x)$ как вероятности $P(X \leq x)$.

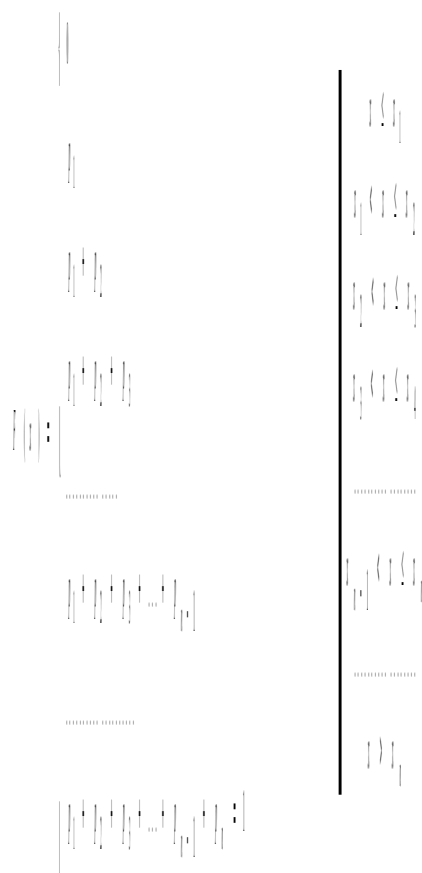
Для дискретных случайных величин: $x_i < x \quad \forall i$, тогда

$$P(X \leq x) = P(X=x_1) + \dots + P(X=x_i) = \sum_{x_i \leq x} P(X=x_i),$$

(неравенство под знаком суммы означает, что суммирование касается всех тех значений x_i , величина которых меньше x .)

Построим функцию распределения дискретной случайной величины, представленной рядом:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_{n-1}	x_n
$P(x)$	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_{n-1}	p_n



Изобразим графическую интерпретацию.

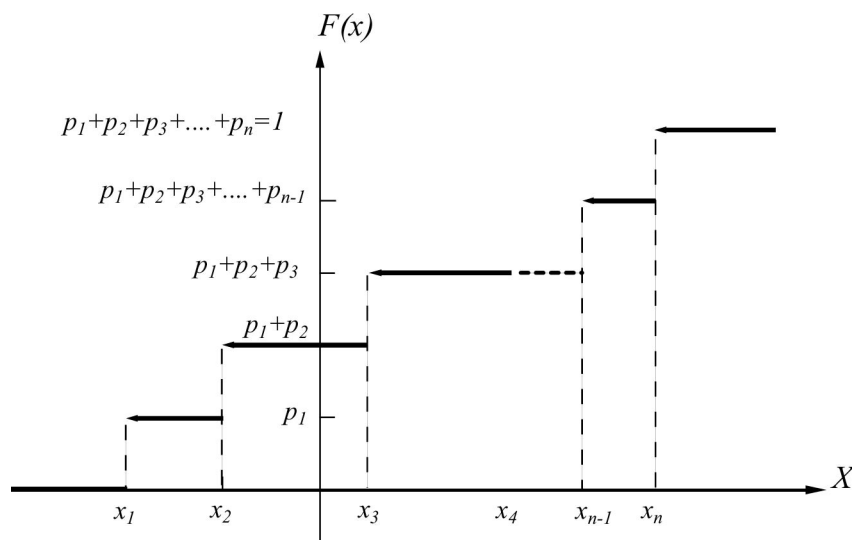


Рис. 8. График функции распределения

в ум.л.у.П

Эксперимент: подбрасывают монету два раза, случайная величина X – это “число выпадения Герба при двух бросках монеты”. Надо построить вариационный ряд, полигон и функцию распределения:

X	x_1	x_2	x_3
P	p_1	p_2	p_3

$$p_1 = C_2^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$p_2 = C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = 2 \frac{1}{4},$$

$$p_3 = C_2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4}.$$

X	0	1	2
-----	---	---	---

P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
---	---------------	---------------	---------------

Проверяем: $p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

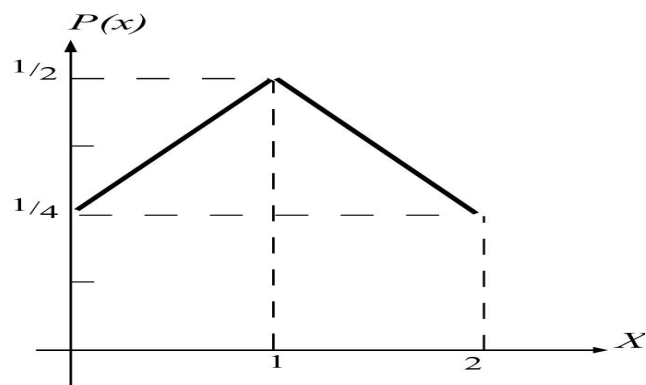


Рис. 9. Полигон

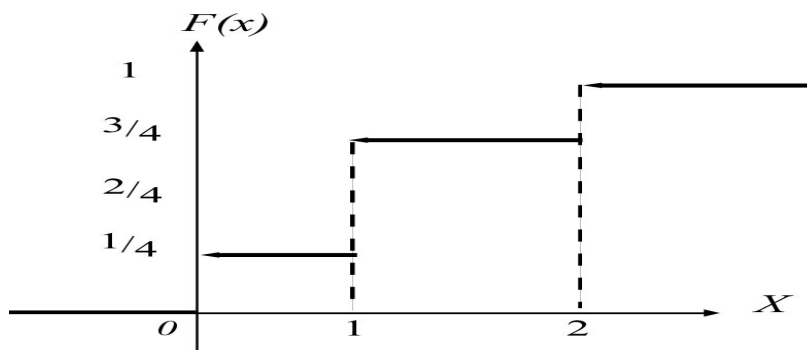


Рис. 10. Функция

Плотность распределения непрерывной случайной величины

Для непрерывной случайной величины нельзя построить ряд распределения. Одним из возможных способов задания непрерывной случайной величины является функция распределения. Если функция распределения непрерывной случайной величины имеет непрерывную производную, то для задания такой величины наряду с функцией распределения можно использовать плотность вероятности.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ – первую производную от функции распределения:

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность называют *дифференциальной функцией* распределения вероятности, а саму $F(x)$ – *интегральной*.

Основные свойства плотности распределения

1. Плотность распределения – неотрицательная функция, т.е.

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in R.$$

2. Интеграл от плотности распределения (несобственный) в пределах от $-\infty$ до $+\infty = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

3. Плотность и функция распределения связаны между собой следующим соотношением

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

На практике часто требуется определить вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее заданному интервалу (a, b) , зная либо плотность $f(x)$, либо функцию $F(x)$.

Если знаем плотность $f(x)$, то вероятность равна

$$P(a \leq x < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Если знаем функцию распределения $F(x)$, то вероятность равна $P(a \leq x < b) = F(b) - F(a)$.

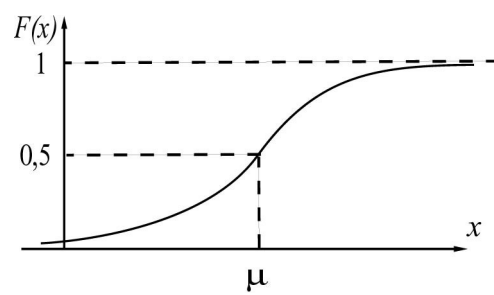


Рис. 11. Функция распределения

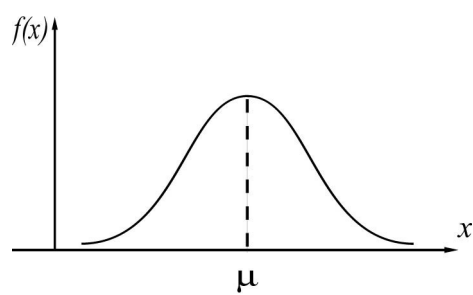


Рис. 12. Функция плотности распределения

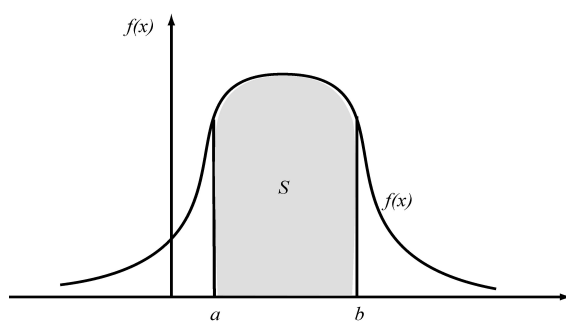


Рис. 13. Значение площади области S соответствует значению вероятности попадания случайной величины в интервал (a;b)

Отсюда следует лемма:

а м еЛ

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение равна нулю.

$$P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0.$$

Геометрически полученный результат можно истолковать так: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a,b) , равно площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox , кривой $f(x)$ и $x=a, x=b$.

в ум луС

Функция распределения случайной величины X задана выражением

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -\frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2} & \text{при } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \\ 1 & \text{при } x > \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

а) найти вероятность попадания значения случайной величины X в результате опыта в интервал $(a;b)$

$$P(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}) = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{2} \cos y dy = \frac{1}{2} \sin y \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2} (\sin(\frac{1}{2}) - \sin(0)) = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}.$$

Мы воспользовались заменой $x - \pi/4$.

$$P(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{2}.$$

б) Построить график функции в интервале $(-\pi/4; 3\pi/4)$

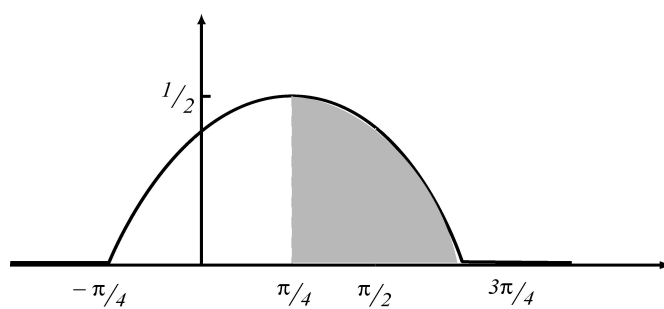
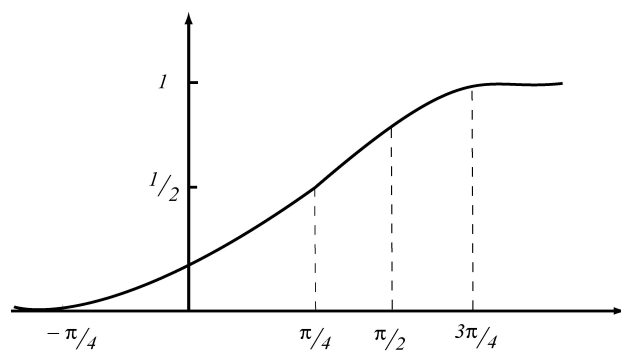


Рис. 14. Графики функции распределения и функции плотности распределения к примеру

Задачи

162. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Построить полигон распределения.

163. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

а)

X	2	4	5	6
P	0,3	0,1	0,2	0,4

б)

X	10	15	20
P	0,1	0,7	0,2

Построить полигон распределения, функцию распределения и начертить ее график.

164. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составьте закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.
165. В партии из 10 деталей имеются 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составьте закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.
166. Построить ряд и функцию распределения числа попадания мячом в корзину при 2-х бросках, если вероятность попадания равна 0,4.

167. Из партии в 25 изделий, среди которых имеются 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия. Построить ряд распределения случайного числа X бракованных изделий, содержащихся в выборке.

168. Дан ряд распределения

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Требуется: а) построить полигон распределения; б) построить функцию распределения и начертить ее график; в) найти вероятность того, что величина X примет значение, превосходящее по абсолютной величине 1.

169. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны 4 детали. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X - числа нестандартных деталей среди 4-х отобранных - и построить полигон полученного распределения.

170. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X - числа появлений герба при двух бросаниях монеты.

171. Случайная величина X принимает значения $-1; 0; 1$ с вероятностями, соответственно равными $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$. Написать выражение и построить график функции распределения случайной величины X .

172. Случайная величина задана функцией распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2 \\ (x - 2)^2, & \text{если } 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Найти: а) плотность вероятности $f(x)$; б) вероятность попадания случайной величины в интервал $(1; 2,5)$.

173. Функция распределения случайной величины задана формулой: $F(x)=A+B*\arctg(x)$ ($-\infty < x < \infty$). Найти:
 а) постоянные A и B ; б) плотность вероятности $f(x)$;
 в) вероятность того, что случайная величина попадет в отрезок $[-1;1]$

174. Плотность вероятности непрерывной случайной величины равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ x - \frac{1}{2}, & \text{если } 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Построить функцию распределения $F(x)$ и начертить ее график.

175. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = (3/2)\sin 3x$ в интервале $(0, \frac{\pi}{3})$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$.

176. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ \cos x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{если } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти функцию распределения.

177. Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$ равна $f(x)=C \sin 2x$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C .

178. Плотность вероятности непрерывной случайной величины равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ \frac{1}{2} \sin x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{если } x > \pi \end{cases}$$

требуется: а) построить функцию распределения $F(x)$; б) найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(0, \frac{\pi}{4})$.

179. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \frac{\pi}{6} \\ 3 \sin 3x, & \text{если } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \\ 0, & \text{если } x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Найти функцию распределения.

180. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на всей оси Ox равенством $f(x) = 2C/(1+x^2)$. Найти постоянный параметр C .
181. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)$, причем

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ a(3x - x^2), & \text{если } 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Требуется: а) Найти коэффициент a ; б) построить график распределения плотности $y = f(x)$; в) найти вероятность попадания X в промежуток $(1, 2)$.

182. Случайная величина X задана функцией распределения (интегральной функцией):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ \frac{x-1}{2}, & \text{если } 1 \leq x \leq 3 \\ 1, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервалы $(1,5; 2,5)$ и $(2,5; 3,5)$.

183. Случайная величина X задана функцией распределения (интегральной функцией):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2 \\ (x-2)^2, & \text{если } 2 \leq x \leq 3 \\ 1, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию распределения случайной величины. Вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервалы $(1;2,5)$ и $(2,5;3,5)$.